

数学 II - 2 試験問題 (担当: 渚)

1 次の二つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

に対して

- (1) A, B の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- (2) A, B を同時に上半三角化する直行行列と、その上半三角行列を求めよ。

2 ω を 1 の 3 乗解とする (つまり $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$)。

(1) 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ \omega & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

をユニタリ行列によって対角化せよ。また、そのユニタリ行列を求めよ。

(2) 次の行列

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 0 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

をユニタリ行列によって対角化せよ。また、そのユニタリ行列を求めよ。

3 次の 2 次形式の標準形の符号数を求めよ。

- (1) $x^2 + y^2 - z^2 + 4xy + 4yz$
- (2) $xy + xz + xu + yz + yu + zu$

4 次の正規行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\sqrt{2} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

について

- (1) ユニタリ行列で対角化せよ。ユニタリ行列も求めてください。
- (2) 直行行列で

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

の形に変換せよ。直行行列も求めてください。