

1. 関数  $f$  を

$$f(x) = \sin(1 - \cos x) (x \in R)$$

で定める. このとき,  $f$  の  $x = 0$  の周りのテイラー展開を  $x^4$  の項までもとめよ.

## 2. 関数

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + |x|} (x \in R)$$

は原点  $x = 0$  で何回微分可能か.

3. 2変数関数  $f(x, y)$  を次のように定義する:

$$f(x, y) = \frac{1 + x}{(1 + x)^2 + y^2}$$

このとき

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

を求めよ.

4. 次の問に答えよ. (1)  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i, T_n = \sum_{i=1}^n a_i^2$  とおく.

(i)  $a_i \leq 0 (i \in N)$  のとき,

[P] 数列  $\{S_n\}_{n \in N}$  が収束するならば数列  $\{T_n\}_{n \in N}$  も収束する

ことを示せ.

(ii)  $a_i \in R (i \in R)$  のとき, [P] が正しければ証明し, そうでなければ反例をあたえよ.

(2) 関数  $f: [0, \infty) \rightarrow R$  が連続であるとする.  $x \in (0, 1)$  にたいして  $F(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} f(nx)x^n$  とおく.

(i)  $f$  が有界であれば,

[Q]  $F(x)$  が実数値関数として定義され,  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} F(x) = f(0)$  である

ことを示せ.

(ii) ある定数  $c, k \in (0, \infty)$  に対して,

$$|f(x)| \leq c(1 + |x|^k) (\text{任意の } x \in [0, \infty))$$

であるとき, [Q] が正しければ証明し, そうれなければ反例をあげよ.